*А.А. Локшин, Н.Н. Лаврова, М.С. Мальгина*

# Односторонний муравей, деревья и линейный перебор объектов

## Учебное пособие

*Второе издание,*
*исправленное и дополненное*

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2024

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Л73

https://elibrary.ru/rymlal

Рецензент:
*Е.А. Сагомонян* – канд. физ.-мат. наук, доцент
(механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова)

**Локшин А.А., Лаврова Н.Н., Мальгина М.С.**

Л73 **Односторонний муравей, деревья и линейный перебор объектов :** учебное пособие / А.А. Локшин, Н.Н. Лаврова, М.С. Мальгина. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : МАКС Пресс, 2024. – 56 с.: ил.
ISBN 978-5-317-07145-5
https://doi.org/10.29003/m3803.978-5-317-07145-5

Рассматриваются различные способы перечисления неупорядоченных совокупностей. Основное внимание уделяется связи трех комбинаторных задач: о кратчайших маршрутах муравья по прямоугольной решетке, о перечислении многозначных чисел в случае неубывания цифр (при чтении слева направо) и о перечислении допустимых раскрасок множеств, на элементах которых определено отношение «одинаковости».

Во втором издании исправлены замеченные неточности и добавлен новый материал, относящийся к перечислению многозначных чисел, цифры которых удовлетворяют заданным ограничениям.

Для студентов techninstitutов и старших школьников, интересующихся математикой.

*Ключевые слова:* кратчайший путь по решетке, перечисление многозначных чисел при наличии ограничений, раскраска мешков.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73

**ISBN 978-5-317-07145-5**

© А.А. Локшин, Н.Н. Лаврова, М.С. Мальгина, 2022
© А.А. Локшин, Н.Н. Лаврова, М.С. Мальгина, 2024, с изменениями
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2024

# Содержание

# Предисловие

В брошюре рассматриваются различные способы перечисления неупорядоченных совокупностей. Основное внимание уделяется связи трех комбинаторных задач: о кратчайших маршрутах муравья по прямоугольной решетке, о перечислении многозначных чисел в случае неубывания цифр (при чтении слева направо) и о перечислении допустимых раскрасок множеств, на элементах которых определено отношение «одинаковости».

В Добавлениях 1–3 рассмотрена задача о числе маршрутов «одностороннего» муравья, путешествующего по треугольной решетке, задача о путешествиях короля по шахматной доске, а также задача о замощении полоски «доминошками», «триминошками» и «тетраминошками».

Во втором издании исправлены замеченные неточности; кроме того, в § 4 добавлен новый материал, относящийся к перечислению многозначных чисел, цифры которых удовлетворяют заданным ограничениям.

Авторы признательны Е.А. Ивановой за поддержку и полезные замечания.

*Авторы*
*Москва, февраль, 2024*

## § 1. Односторонний муравей. Путешествие в противоположный угол прямоугольной решетки

В этом параграфе мы рассмотрим классическую задачу об одностороннем муравье, которому разрешено двигаться только вверх или вправо.

**Задача 1.1.** *Односторонний муравей сидит в левом нижнем углу прямоугольной решетки размером* $m \times k$ *и должен попасть в правый верхний угол решетки. Для определенности рассмотрим случай решетки размером* $5 \times 3$ *(см. рис. 1).*

*Спрашивается: сколькими способами односторонний муравей может попасть из левого нижнего угла в правый верхний угол решетки?*

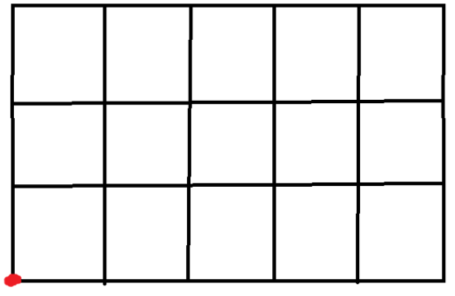

Рис. 1

**Замечание.** Здесь и в дальнейшем, говоря о решетке размером $m \times k$, мы будем понимать под $m$ ширину решетки, а под $k$ – ее высоту. (Количество узлов такой решетки, очевидно, равно $(m + 1)(k + 1)$.)

**Замечание.** Иногда эту задачу формулируют в следующем эквивалентном виде. Обыкновенный (не односторонний) муравей сидит в левом нижнем углу решетки размером $m \times k$ и должен попасть в правый верхний угол решетки. Сколько существует различных кратчайших путей у муравья?

Нам, однако, будет удобнее придерживаться исходной постановки задачи о муравье и считать его односторонним.

**Замечание.** В дальнейшем любой маршрут, проложенный по звеньям решетки, мы будем называть *допустимым*, если его изображение представляет собой график неубывающей ступенчатой функции (имеет вид лестницы, поднимающейся при движении слева направо).

**Решение.** Эта задача интересна тем, что в ней легко дать интуитивно ясный мгновенный ответ, но убедительно обосновать его значительно труднее.

Итак, первое, что мы замечаем – это то, что муравью (см. рис. 1) для попадания из левого нижнего угла решетки в правый верхний угол придется пройти ровно по восьми звеньям решетки ($8 = 5 + 3$). Очевидно также, что звенья решетки, по которым пройдет муравей (какой бы допустимый маршрут он ни выбрал), будут естественным образом упорядочены, в соответствии с очередностью их прохождения.

Итак, звенья решетки, по которым может пройти муравей, образуют упорядоченный набор (кортеж). Однако количество таких допустимых кортежей не удается вычислить при помощи правила произведения. Действительно, в любом из узлов решетки, расположенных на ее верхней или правой стороне, у муравья существует не более одного варианта для выбора дальнейшего пути. В то же время, в остальных узлах решетки таких вариантов у нашего одностороннего муравья имеется в точности 2. В результате может возникнуть впечатление, что задача «не решается в одно действие» и требует каких-то сложных выкладок.

Однако это не так. Покажем, что ответ к поставленной задаче – это в точности число сочетаний из 8 элементов по 3. Итак, ответ довольно неожиданным образом оказывается числом сочетаний, т.е. числом подмножеств (неупорядоченных совокупностей), а не числом кортежей. Как же это объяснить?

Приведем, наконец, соответствующее рассуждение. Введем в рассмотрение 8 карточек и перенумеруем их числами от 1 до 8. Затем тщательно перемешаем карточки и выберем из множества карточек трехэлементное подмножество (какие-то три карточки). На каждой из выбранных карточек нарисуем стрелку, направленную вверх.

Теперь разложим наши карточки по порядку (в соответствии с их номерами) и сопоставим разложенный ряд карточек маршруту муравья. (Карточки со стрелкой указывают на движение вверх по звену решетки, остальные карточки обозначают движение по горизонтали.) Нетрудно видеть, что устанавливаемое таким образом соответствие между допустимыми маршрутами муравья и разложенными наборами карточек является взаимно однозначным. Тем самым приведенный выше ответ для числа допустимых маршрутов обоснован.

**Замечание.** В общем случае прямоугольной решетки размером $m \times k$ ответ к задаче дается числом сочетаний $C^{k}_{m+k} = C^{m}_{m+k}$.

Подчеркнем, что числа $m$ и $k$ входят в ответ к задаче 1.1 симметричным образом; это вполне естественно, поскольку очевидно, что если в условии задачи $m$ и $k$ поменять местами, ответ не должен измениться.

**Замечание.** Еще один подход к решению подобных задач можно найти, например, в [6].

## § 2. Числа с возрастающими цифрами

Здесь мы, для полноты картины, рассмотрим еще одну известную задачу, где количество кортежей тоже подсчитывается как количество подмножеств (т.е. количество неупорядоченных наборов).

**Задача 2.1.** *Сколько существует шестизначных чисел, у которых цифры расположены строго в порядке возрастания?*

**Решение.** Заметим, прежде всего, что в записи интересующих нас шестизначных чисел не может присутствовать ноль (это очевидно, поскольку запись числа не может начинаться с нуля, а все остальные места оказываются для нуля «запрещенными»). Очевидно также, что каждое шестизначное число – это упорядоченный набор цифр, т.е. кортеж. Однако снова, как и в предыдущем параграфе, правило произведения для подсчета интересующих нас кортежей неприменимо. Действительно, если первая цифра в записи числа – это 1, то для выбора второй цифры пригодны четыре варианта – цифры 2, 3, 4, 5. Если же в качестве первой цифры взять, например, цифру 4, то для выбора второй цифры существует единственная возможность – цифра 5.

Тем не менее, задача решается «в одно действие». Действительно, возьмем девять карточек и занумеруем их числами от 1 до 9. Затем перетасуем их и выберем шестиэлементное подмножество из множества наших карточек.

Нетрудно понять, что таких шестиэлементных подмножеств имеется ровно $C^6{}_9 = 9{\cdot}8{\cdot}7/3!$ штук. Однако, раскладывая выбранные карточки в порядке возрастания написанных на них цифр, замечаем, что между 6-элементными подмножествами нашего множества карточек и шестизначными числами, у которых цифры расположены в порядке возрастания, имеется взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, ответ в нашей задаче – это число сочетаний $C^6{}_9$.

**Замечание.** Обратим внимание читателя на то, что задача 2.1 и аналогичные ей (с другими числовыми данными) фактически относятся к классу задач 1.1, хотя изоморфизм (полное сходство) соответствующих друг другу задач на первый взгляд не очевиден.

**Замечание**. В общем случае, если разрешается использовать цифры из набора, содержащего $k$ цифр, количество $t$-значных чисел, у которых цифры расположены в порядке возрастания, равно $C^t{}_k$ (здесь $t \le k$).

Вот еще одна вариация на эту тему.

**Задача 2.2.** *Имеется девять бумажных карточек с написанными на них цифрами от 1 до 9.*

*а) Сколько можно составить из этих карточек девятизначных чисел, у которых значения цифр строго возрастают вплоть до середины записи, а затем строго убывают?*

*б) Тот же вопрос, если составляются семизначные числа.*

**Ответ:** а) $C_8{}^4$; б) $C_9{}^7\,C_6{}^3$.

**Задача 2.3.** *Имеется девять бумажных карточек с написанными на них цифрами от 1 до 9.*

*а) Сколько можно составить из этих карточек девятизначных чисел, у которых значения цифр образуют «зубчатую последовательность» (т.е. первая цифра больше второй, но вторя меньше третьей, которая, в свою очередь, больше четвертой и т.д.)?*

*б) Тот же вопрос, если составляются семизначные числа.*

**Замечание.** Решение этой задачи авторам неизвестно. Для удобства читателя приведем несколько примеров «зубчатых» девятизначных чисел:

918273645; 829173546; 546372819; 645371928.

Нетрудно однако дать оценку снизу числа N «зубчатых» девятизначных чисел. Действительно, если на нечетных местах записи девятизначного числа расставить (в произвольном порядке) цифры 9, 8, 7, 6, 5, а на четных местах – (тоже в произвольном порядке) цифры 4, 3, 2, 1, то, очевидно, получим «зубчатую» запись. Всего, действуя таким способом, очевидно, можно получить 5!4! «зубчатых» девятизначных чисел. Из приведенных выше примеров видно, что указанным способом мы можем получить далеко не все «зубчатые» девятизначные числа. Итак, мы пришли всего лишь к довольно грубой оценке: $N > 5!4!$.

Нетрудно также оценить число N сверху. Действительно, очевидно, что цифра 1 может занимать только четное место в записи «зубчатого числа», а цифры 9 и 8 – только нечетные места. Таким образом, нвужно выбрать для заполнения оставшихся трех четных мест три цифры из набора, содержащего шесть цифр: {7, 6, 5, 4, 3, 2}. Это можно сделать $C^3_6$ способами. В итоге получаем для числа N грубую оценку сверху: $N < C^3_6 5!4!$.

## § 3. Односторонний муравей. Путешествие к противоположной стороне прямоугольной решетки

В этом параграфе мы рассмотрим более сложную ситуацию, чем в § 1.

**Задача 3.1.** *Односторонний муравей сидит в левом нижнем углу прямоугольной решетки размером* $m \times k$. *Для определенности снова рассматриваем случай решетки размером* $5 \times 3$ *(см. рис. 2). Спрашивается: сколькими способами односторонний муравей может добраться из левого нижнего угла до правой стороны решетки?*

**Замечание.** На этот раз маршруты нашего одностороннего муравья уже не будут все иметь одинаковую длину (и все, кроме одного – горизонтального – не будут кратчайшими).

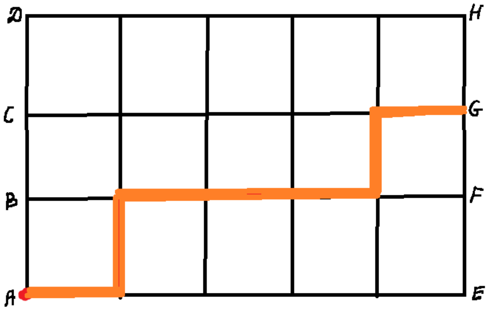


Рис. 2

**Решение.** Заметим, что каждому допустимому маршруту из левого нижнего угла до правой стороны решетки соответствует ровно один допустимый маршрут из левого нижнего угла в правый верхний угол решетки. Обратное, очевидно, также верно. (На рис. 2 маршруту AG соответствует маршрут AGH.)

Таким образом, число допустимых маршрутов в нашей задаче по-прежнему равно $C^k_{m+k}$.

**Задача 3.2.** *Односторонний муравей собирается начать свое путешествие на одном из узлов левой стороны прямоугольной решетки размером $m \times k$. Для определенности снова рассматриваем случай решетки размером $5 \times 3$ (см. рис. 3). Спрашивается: сколько различных маршрутов может проложить односторонний муравей от левой стороны до правой стороны решетки?*

**Решение.** Заметим, что каждому допустимому маршруту из любого узла левой стороны решетки до правой стороны решетки соответствует ровно один допустимый маршрут из левого нижнего угла в правый верхний угол решетки. Обратное, очевидно, также верно. (На рис. 3 маршруту BG соответствует маршрут ABGH.)

Таким образом, число допустимых маршрутов в нашей задаче и на этот раз оказывается равным $C^k_{m+k}$.

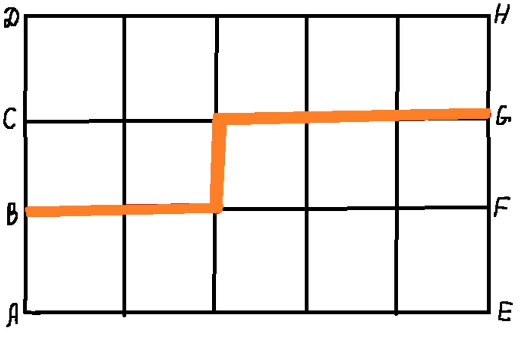


Рис. 3

## § 4. Числа с неубывающими цифрами

Рассмотрим теперь задачу, аналогичную задаче 2.1, заменив теперь требование возрастания цифр более мягким требованием неубывания.

**Задача 4.1.** *Сколько существует $t$-значных чисел, у которых цифры расположены в порядке неубывания? (Разрешается использовать все цифры от 1 до 9.)*

**Решение.** Сейчас мы увидим, что сходство задачи 4.1 (и аналогичных ей) с классом задач 3.1 лежит на поверхности; см. рис. 4.

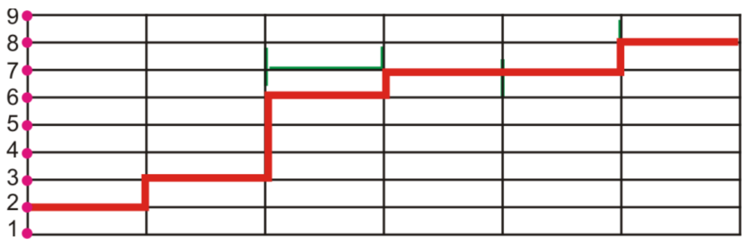


Рис. 4. Изображенному маршруту соответствует шестизначное число 236778

Очевидно, что допустимые маршруты на рис. 4 – это теперь «лестницы» со ступеньками различной длины, ведущие от левой стороны решетки к правой стороне решетки. В случае $t$-значного числа количество таких маршрутов в решетке размером $t\times 8$, очевидно, будет равно $C^{8}_{t+8} = C^{t}_{t+8}$.

**Задача 4.2.** *Сколько существует $t$-значных чисел, у которых цифры расположены в порядке неубывания? (Разрешается использовать цифры из набора, содержащего $k$ цифр.)*

**Решение.** По аналогии с предыдущей задачей можно сразу написать ответ: $C_{t+k-1}^{k-1} = C_{t+k-1}^{t}$.

**Замечание.** Нетрудно видеть, что при любом t, большем 1,

$C_{t+k-1}^{t} > C^{t}_{k}$

(количество $t$-значных чисел с неубывающими цифрами больше количества $t$-значных чисел с возрастающими цифрами).

**Пример.** Подсчитаем непосредственно, сколько существует трехзначных чисел, записываемых с помощью двух цифр 3 и 7 при условии, что цифры в записи числа расположены в порядке неубывания.

Имеем:

333; 337; 377; 777.

В соответствии с выведенной выше формулой, количество рассматриваемых чисел оказалось равно $4 = C^{1}_{3+1}$.

**Еще пример.** Подсчитаем непосредственно, сколько существует трехзначных чисел, записываемых с помощью трех цифр 1, 2 и 7 при условии, что цифры в записи числа расположены в порядке неубывания.

Имеем, располагая сами числа в порядке возрастания:

111; 112; 117; 122; 127; 177; 222; 227; 277; 777.

В соответствии с выведенной выше формулой, количество рассматриваемых чисел оказалось равно $10 = C^{2}_{3+2}$.

**Замечание.** Задача 4.1 может быть решена совершенно иным, хорошо известным в комбинаторике способом. Для определенности, мы ограничимся случаем шестизначных чисел (см. рис. 4а).

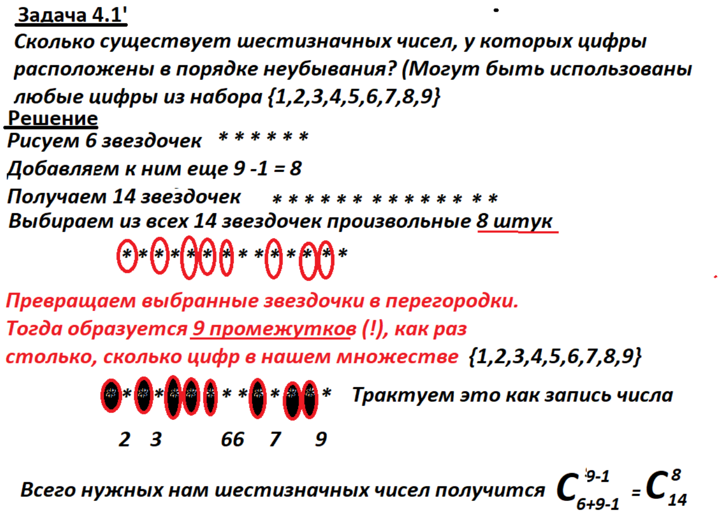


Рис. 4а

**Замечание.** Нетрудно понять, что задача 4.1' полностью аналогична следующей.

**Задача 4.1''.** *Имеется 9 различных сортов мороженого, продающегося в пачках. Сколькими способами можно купить шесть пачек мороженого (не обязательно различных сортов)?*

На первый взгляд кажется, что постановка этой задачи существенно отличается от предыдущей. Действительно, значения цифр естественным образом упорядочены по величине, в то время как сорта мороженого никак не упорядочены. Однако мы можем волевым образом их перенумеровать, и кажущееся различие между задачами 4.1' и 4.1'' исчезнет.

Любопытно, что если в задаче 4.1'' уменьшить число пачек приобретаемого мороженого до трех, то в такой постановке не требуется привлекать для решения неочевидные геометрические модели, а можно обойтись совсем простыми соображениями.

Итак, рассматривается

**Задача 4.1'''.** *Имеется 9 различных сортов мороженого, продающегося в пачках. Сколькими способами можно купить три пачки мороженого (не обязательно различных сортов)?*

**Ответ:** $C^3_9 + C^1_9\, C^1_8 + C^1_9 = 165 = C^8_{11}$.

## § 5. Мешки как множества с отношением одинаковости

Понятие «мешок» было введено в курс школьной информатики А.Л. Семеновым; по-видимому, оно почти столь же фундаментально, как понятие «множество». О том, какие коллизии возникают при одновременном использовании этих двух понятий, можно прочесть, например, в [1] и [2].

Нам будет удобно считать, что мешок – это множество, на элементах которого определено отношение *одинаковости.*

Поясним действие этого отношения. Например, в спортивной сумке лежит несколько новых шариков от настольного тенниса. Эти шарики неотличимы друг от друга, и поэтому – одинаковы. Если на них нанести фломастером различные метки (например, номера), то шарики перестанут быть одинаковыми.

Будем, следуя А.Л. Семенову, считать, что *два мешка А и В одинаковы*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначно соответствие, при котором элементы мешка А одинаковы с соответствующими им элементами мешка В.

Мешки оказались чрезвычайно удобным средством для развития у детей (а также у студентов techинститутов) умения осуществлять целенаправленный перебор объектов при помощи построения *деревьев перебора.* Рисуя такое дерево, важно уметь правильно поставить вопрос (или сформулировать принцип), согласно которому это дерево будет ветвиться.

Рассмотрим, например, такую задачу.

**Задача 5.1.** *В мешке находятся 3 одинаковых бумажных круга. Каждый круг должен быть покрашен в один из трех следующих цветов: красный, зеленый, синий. Требуется перечислить все возможные раскраски.*

На рис. 5 изображено соответствующее дерево перебора. Как видно из этого рисунка, всего различных раскрасок, удовлетворяющих условиям задачи, ровно 10.

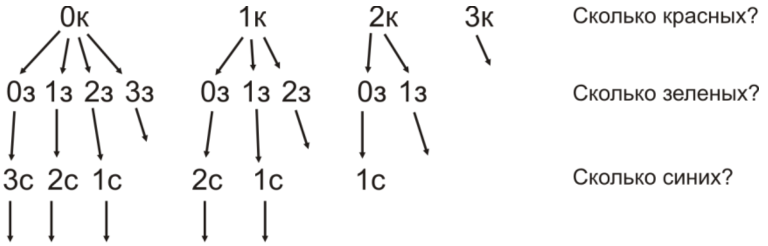


Рис. 5

Здесь следует отметить, что даже для нашей модельной задачи перечисление с помощью дерева перебора различных раскрасок мешка (или, что то же самое, перечисление различных образующихся мешков) оказывается довольно громоздким.

Если бы в мешке находилось больше фигур и, тем более, если бы эти фигуры принадлежали к нескольким различным классам, дерево перебора вполне могло бы выйти за пределы бумажного листа и сделаться неудобным и плохо обозримым.

В следующем параграфе мы разберем иной способ перебора, основанный на присвоении мешкам удобных для работы с ними числовых номеров.

* * *

В заключение этого параграфа приведем еще две задачи. Фактически речь пойдет о способах подсчета мешков, содержащих не геометрические фигуры, а числа.

**Задача 5.2.** *Сколькими способами можно представить число «10» в виде суммы трех попарно различных слагаемых? (Порядок слагаемых не имеет значения.)*

**Решение.** Будем перечислять все допустимые разбиения, располагая слагаемые по убыванию. Имеем:

$10 = 7 + 2 + 1$;

$10 = 6 + 3 + 1$;

$10 = 5 + 4 + 1$;

$10 = 5 + 3 + 2$.

Других представлений числа «10» в виде суммы трех различных слагаемых не существует. Итак, интересующих нас представлений оказалось всего четыре. Предложенный процесс непосредственного «линейного» перебора устроен достаточно просто, однако, в случае больших чисел имеет смысл привлекать комбинаторные соображения.

**Задача 5.3.** *Сколькими способами можно представить число «1001» в виде суммы трех попарно различных слагаемых? (Порядок слагаемых не имеет значения.)*

**Решение.** Представим число 1001 в виде суммы единиц, тогда между этими единицами будет ровно 1000 промежутков, из которых выберем два, разбив тем самым число 1001 на три слагаемых. Дальше будем рассуждать следующим образом. Так как число 1001 на 3 не делится, то все три полученные нами слагаемых не могут быть одинаковыми. Нам нужно исключить лишь случаи, когда два из получившихся слагаемых равны между собой. Таких случаев будет ровно 3×500. Действительно, третье (не равное двум другим) слагаемое обязательно должно быть нечетным, но от 1 до 999 включительно содержится ровно (999 + 1)/2 = 500 нечетных чисел. Теперь заметим, что нечетное число b может входить в рассматриваемую сумму из трех слагаемых (где два другие слагаемые одинаковы) тремя различными способами:

b + a + a; a + b + a; a + a + b.

Таким образом, всего среди наших разбиений числа 1001 на три слагаемых будет ровно 3×500 случаев, когда два слагаемых оказываются равными между собой. Так как в итоге порядок слагаемых мы не должны учитывать, получаем следующий результат.

***Ответ:*** Число 1001 можно разбить на три различных слагаемых $[C^2{}_{1000} - 3\times500]/3!$ способами.

## § 6. Как лучше перенумеровать раскрашенные мешки?

Рассмотрим задачу, аналогичную тем, которые давал в своем курсе математики и информатики в МПГУ А.Л. Семенов.

**Задача 6.1.** *В мешке находятся 5 одинаковых бумажных треугольников, 3 одинаковых бумажных квадрата и 2 одинаковых бумажных круга (см. рис. 6). Каждая из фигур, находящихся в мешке, должна быть покрашена в один из трех цветов: красный, зеленый, синий. Сколько существует различных раскрасок мешка?*

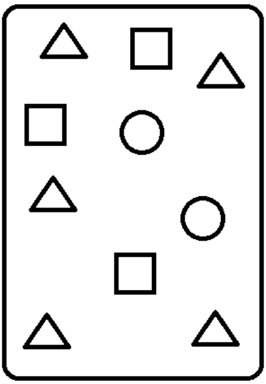

Рис. 6

**Замечание.** Прежде, чем переходить непосредственно к решению задачи 6.1, заметим, что построение дерева перебора, в принципе, позволяет не только ответить на вопрос задачи, но и перечислить все варианты раскрасок. Однако в данной задаче дерево перебора уже не умещается на стандартном бумажном листе, и пользоваться им не слишком удобно.

Идея состоит в том, чтобы перенумеровать возможные раскраски мешков и сделать это так, чтобы по номеру раскрашенного мешка легко считывался его состав. Затем номера мешков уже будет нетрудно расположить в порядке возрастания (или убывания).

Заметим теперь, что, поскольку фигуры в мешке не упорядочены (в соответствии с определением мешка), их можно – еще до процедуры раскрашивания – расположить в любом удобном для нас фиксированном порядке.

Выберем, например, порядок расположения фигур, изображенный на рис. 7. В верхней части мешка сгруппированы треугольники, в его средней части – квадраты, а внизу – круги.

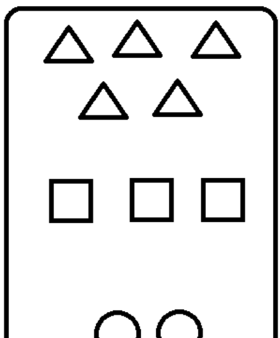

Рис. 7

Сейчас мы, наконец, подготовлены к решению поставленной задачи.

**Решение.** Сопоставим каждому раскрашенному мешку десятизначное (по количеству фигур в мешке) число. Старшие пять разрядов отведем «под треугольники», следующие за ними три разряда – «под квадраты», два оставшихся младших разряда – «под круги».

Разберемся вначале со старшими разрядами; ситуация с остальными разрядами прояснится по аналогии.

Итак, красному треугольнику сопоставляем цифру «1», зеленому – цифру «2», синему – цифру «3» и располагаем в пяти старших разрядах эти цифры ***в порядке неубывания (!).***

**Замечание.** Неупорядоченный набор из трех цифр

$\{1, 2, 3\}$ (*)

был выбран нами произвольным образом; вместо него можно было использовать неупорядоченный набор из любых других трех цифр.

Теперь, после принятого соглашения, запись (в пяти старших разрядах)

11111.....

будет означать, что в мешке находится 5 красных треугольников, а запись

12223.....

– что в мешке один красный треугольник, три зеленых и один синий.

Теми же цифрами «1», «2» и «3» кодируем цвета квадратов и кругов.

Например, запись

13333 222 13

означает, что в мешке один красный и четыре синих треугольника, три зеленых квадрата, один красный и один синий круг.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи, опираясь на результат задачи 4.2 из § 2. Имеем:

а) количество пятизначных чисел, для записи которых можно использовать только цифры из набора (*) расположенные в порядке неубывания, равно $C^2{}_7$;

б) количество трехзначных чисел, для записи которых разрешено использовать только цифры из набора (*), расположенные в порядке неубывания, равно $C^2{}_5$;

в) количество двузначных чисел, для записи которых разрешено использовать только цифры из набора (*), расположенные в порядке неубывания, равно $C^2{}_4$.

В результате число различных раскрасок рассматриваемого мешка оказывается равным произведению

$$C^2{}_7\,C^2{}_5\,C^2{}_4$$

(мы воспользовались известным из комбинаторики *правилом произведения*).

**Замечание.** Фактически, десятизначные числа, приписанные раскраскам мешка, являются их номерами. Располагая эти номера в порядке возрастания и проявляя при этом должную внимательность, можно перечислить всевозможные раскраски рассматриваемого мешка.

**Замечание**. В общем случае, если в мешке имеется m одинаковых фигур первого типа, n одинаковых фигур второго типа,..., $r$ одинаковых фигур последнего типа и $k$ различных красок, которые можно использовать, то число всевозможных различных раскрасок мешка будет равно произведению чисел сочетаний:

$$C_{m+k-1}^{k-1}C_{n+k-1}^{k-1}\ldots C_{r+k-1}^{k-1}. \qquad (**)$$

В частности, если $k = 2$, т.е. в нашем распоряжении имеются всего две краски, выражение (**) оказывается равным произведению $(m + 1)(n + 1) \ldots (r + 1)$.

**Упражнение.** В мешке содержится m одинаковых треугольников и столько же одинаковых квадратов. Число красок, которыми можно пользоваться, раскрашивая фигуры из мешка, равно $k$. Известно также, что $m + k = 20$. Доказать, что число различных возможных раскрасок мешка делится на 361.

**Задача 6.2.** *В мешке находится 7 одинаковых бумажных кругов, каждый из которых разделен на два полукруга. Круги должны быть полностью окрашены, причем разрешается пользоваться красной, зеленой и желтой краской. Кроме того, каждый полукруг окрашивается в свой цвет независимо. Сколько существует различных способов раскраски содержимого мешка?*

## § 7. Перечисление раскрасок с ограничениями

В случае, когда на раскраску элементов мешка налагаются дополнительные ограничения, формула (**), очевидно, перестает работать. (Впрочем, в этом случае она может быть использована для оценки сверху числа возможных раскрасок.) Рассмотрим теперь усложненную версию задачи 6.1 (такие задачи предлагались А.Л. Семеновым в его курсе математики и информатики в МПГУ).

**Задача 7.1.** *В мешке находятся 5 одинаковых бумажных треугольников, 3 одинаковых бумажных квадрата и 2 одинаковых бумажных круга (см. рис. 7). Каждая из фигур, находящихся в мешке, должна быть покрашена в один из трех цветов: красный, зеленый, синий. Сколько существует различных раскрасок мешка, если число красных фигур в мешке должно равняться 8?*

**Первое решение.** В отличие от задачи 6.1, мы, очевидно, не можем воспользоваться формулой вида (**) для ответа на вопрос задачи. Поэтому, применяя ту же кодировку для раскрасок, что и в предыдущем параграфе, начнем перечислять раскраски в порядке возрастания их десятизначных «номеров»:

11111 111 22;

11111 111 23;

11111 111 33;

11111 112 12;

11111 112 13; (внимание!)

11111 113 12;

11111 113 13; (внимание!)

11111 122 11;

11111 123 11;

11111 133 11; (внимание!)

11112 111 12;

11112 111 13; (внимание!)

11112 112 11;

11112 113 11; (внимание!)

11113 111 12;

11113 111 13;

11113 112 11;

11113 113 11;

11122 111 11;

11123 111 11;

11133 111 11.

На этом перечисление возможных раскрасок, подчиненных условиям задачи, заканчивается. Всего таких раскрасок оказалось 21.

Эту же задачу можно было решать, рисуя дерево перебора. Ниже мы попробуем скомбинировать оба подхода.

**Второе решение**. Прежде всего, построим таблицу, в которой (в сущности, так же, как это делается при построении дерева перебора) разобьем всю допустимую совокупность раскрасок на несколько классов.

*Таблица 7.1*

| Номер случая | Количество красных треугольников | Количество красных квадратов | Количество красных кругов | Итого |
|---|---|---|---|---|
| № 1 | 5 | 3 | 0 | 8 |
| № 2 | 5 | 2 | 1 | 8 |
| № 3 | 5 | 1 | 2 | 8 |
| № 4 | 4 | 3 | 1 | 8 |
| № 5 | 4 | 2 | 2 | 8 |
| № 6 | 3 | 3 | 2 | 8 |

Все шесть случаев удобно рассматривать отдельно друг от друга. Итак, начнем перечислять допустимые раскраски мешка.

***Случай 1.***

11111 111 22;

11111 111 23;

11111 111 33.

***Случай 2.***

11111 112 12;

11111 112 13;

11111 113 12;

11111 113 13.

***Случай 3.***

11111 122 11;

11111 123 11;

11111 133 11.

***Случай 4.***

11112 111 12;

11112 111 13;

11113 111 12;

11113 111 13.

***Случай 5.***

11112 112 11;

11112 113 11;

11113 112 11;

11113 113 11.

***Случай 6.***

11122 111 11;

11123 111 11;

11133 111 11.

Таким образом, общее количество раскрасок в результате проведенного пересчета снова оказывается равным $3 + 4 + 3 + 4 + 4 + 3 = 21$.

**Замечание.** Следует признать, что первое решение требует более напряженного внимания, чем второе. Возможно, что именно комбинированный подход, использованный во втором решении, является предпочтительным. Однако, на наш взгляд, прием из первого решения полезен и сам по себе, как инструмент развития внимательности.

**Замечание.** Можно представить себе ситуацию, когда количество используемых красок больше девяти. Тогда вместо цифр при нумерации мешков имеет смысл использовать буквы.

## § 8. Обручи и раскраски

В этом параграфе мы рассмотрим еще одну задачу о раскрасках, в которой важную роль сыграет пересечение множеств.

**Задача 8.1** (см. похожие задачи в [2]). *Дано: на плоскости расположены два обруча A и B, различные по своему внешнему виду. Кроме того, внутри обручей помещены пять одинаковых маленьких круглых фишек, причем так, что внутри обруча A фишек вдвое меньше, чем внутри обруча B. Каждая фишка должна быть покрашена в один из трех цветов: красный, зеленый или синий. Сколько существует различных вариантов раскраски фишек?*

**Решение.** Ситуация, изложенная в условии задачи, изображена на рис. 8.

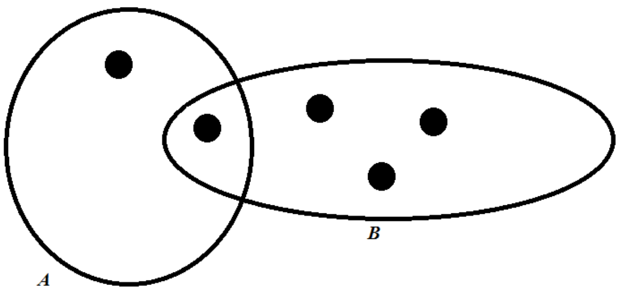


Рис. 8

Здесь, прежде всего, важно условиться, какие раскраски следует считать одинаковыми. Две раскраски будем считать одинаковыми, если после перемещения фишек внутри обручей одна раскраска в точности переходит в другую; при этом фишки не могут перепрыгивать через обручи. В результате становится ясно, что фактически мы имеем дело с тремя сортами фишек:

– к сорту № 1 отнесем фишку, лежащую внутри обруча А, но вне обруча В;

– к сорту № 2 отнесем фишку, лежащую внутри обоих обручей;

– к сорту № 3 отнесем фишки, лежащие внутри обруча В, но вне обруча В.

В результате в соответствии с формулой (**) количество различных раскрасок оказывается равным произведению $C_3^2 C_3^2 C_5^2$.

## § 9. Односторонний муравей с расширенными возможностями

Вернемся теперь к задаче об одностороннем муравье, которому разрешим двигаться не только вверх или вправо, но еще и спускаться вниз.

**Задача 9.1.** *Односторонний муравей (с расширенными возможностями) сидит в левом нижнем углу прямоугольной решетки размером $m \times k$ и должен попасть в правый верхний угол решетки. Для определенности рассмотрим случай решетки размером 6×8 (см. рис. 9).*

*Спрашивается: сколькими способами односторонний муравей может попасть из левого нижнего угла в правый верхний угол решетки? Дважды проходить по одному и тому же звену решетки муравью запрещено.*

**Решение.** На первый взгляд, задача может показаться трудной, однако она решается «в одно действие». Мы снова воспользуемся приемом, использованным ранее в § 3. Заметим, что между маршрутами одностороннего муравья с расширенными возможностями (не проходящими дважды по одному и тому же звену решетки) и всевозможными шестизначными числами (в записи которых могут участвовать цифры от 1 до 9) имеется взаимно-однозначное соответствие; см. рис. 9.

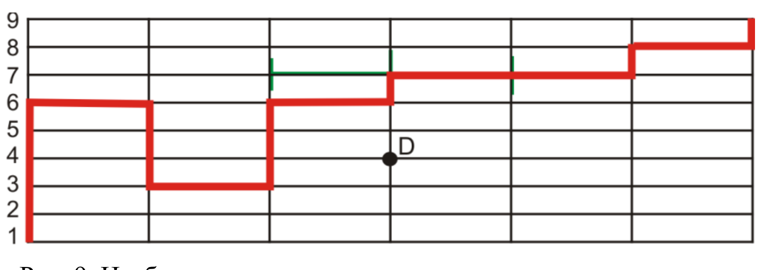


Рис. 9. Изображенному маршруты соответствует шестизначное число 636778

Всего таких шестизначных чисел, очевидно, $9^6$. Значит, и маршрутов нашего муравья из левого нижнего угла решетки в правый верхний угол будет также $9^6$.

В общем случае решетки размером $m \times k$ (где $m$ – ширина решетки, а $k$ – ее высота) таких маршрутов, очевидно, будет $(k+1)^m$.

**Замечание.** Нетрудно понять, что по сравнению с муравьем из § 1 односторонний муравей с расширенными возможностями сможет проложить больше маршрутов из левого нижнего угла решетки в ее правый верхний угол, что соответствует неравенству

$$C^m_{m+k} < (k+1)^m.$$

**Замечание**. Последнее неравенство легко может быть доказано независимым образом.

Действительно, нам нужно показать, что

$$\frac{(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)}{m!} < (k+1)(k+1)\ldots(k+1)$$

(в произведении справа m скобок), но это неравенство сразу следует из того факта, что для любого натурального j при j < m имеем

$$\frac{m+k-j}{(m-j)(k+1)} < 1.$$

**Замечание.** Соответствие между маршрутами муравья и многозначными числами, установленное в задаче 9.1, позволяет естественным образом перенумеровать все эти маршруты, располагая соответствующие им числа в порядке возрастания.

**Замечание**. Решение задачи 9.1 приводит нас к ответу, в который параметры $m$ и $k$ входят несимметричным образом. Это совершенно естественно, т.к., в отличие от предыдущих задач об одностороннем муравье, в этой задаче условия на возможные движения муравья по горизонтали и по вертикали различны.

**Задача 9.2.** *Пусть выполнены условия задачи 9.1. Сколько существует маршрутов у муравья с расширенными возможностями, если ему нужно из левого нижнего угла решетки попасть в правый верхний угол, побывав в узле D? (См. рис. 9.)*

## § 10. Блуждания обыкновенного муравья по прямоугольной решетке

В этом параграфе муравей окончательно *перестает быть односторонним и может двигаться по звеньям решетки в любом направлении* (вверх, вниз, направо, налево).

Муравью даже не запрещено дважды проходить по одному и тому же звену решетки.

Пусть снова муравей сидит в левом нижнем углу решетки размером $m \times k$ и прокладывает себе маршрут в правый верхний угол (см. рис. 10); в качестве примера мы снова взяли решетку размером 6×8.

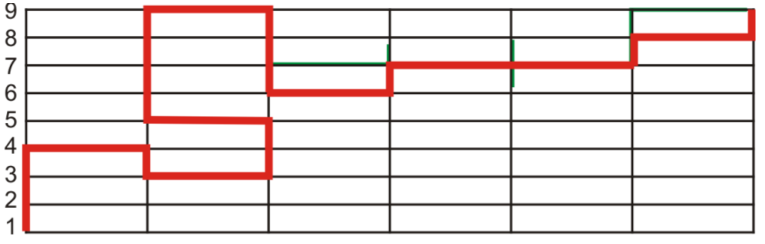


Рис. 10. Маршруту муравья соответствует восьмизначное «число» 43(-5)96778

Нетрудно понять, что теперь маршрут муравья может оказаться сколь угодно длинным. Попробуем сопоставить каждому маршруту нашего обыкновенного муравья числовую запись, причем так, чтобы по ней однозначно восстанавливался маршрут, а сама эта запись была максимально короткой. Фактически мы воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущем параграфе, с той лишь разницей, что теперь приходится вводить знак «минус» перед цифрой, если муравей движется справа налево (см. рис. 10).

Заметим, однако, что не любая последовательность, состоящая из цифр (или цифр, снабженных знаком «минус») соответствует какому-либо возможному маршруту.

Например, последовательность

(-7)1532461,

очевидно, не соответствует никакому маршруту потому, что начинается с цифры, снабженной минусом. (Муравей не может начать двигаться налево, не сдвинувшись перед этим в правую сторону.)

Далее, последовательность

7153246(-1)

точно так же не соответствует никакому маршруту, так как муравью перед окончанием движения пришлось бы выйти за пределы решетки (см. рис. 10).

Перейдем теперь к общему случаю решетки размером $m \times k$. (Напомним, что $m$ – ширина решетки, а $k$ – ее высота. По аналогии с рис. 10 заключаем, что для нумерации маршрутов муравья в нашем распоряжении будет $k + 1$ цифра.)

В дальнейшем цифры, снабженные знаком «минус», мы будем называть *отрицательными цифрами*. Последовательность положительных и отрицательных цифр, построенную по маршруту муравья, будем обозначать через W.

Сформулируем требования к последовательностям типа W, которые позволят установить взаимно-однозначное соответствие между такими последовательностями и маршрутами муравья из левого нижнего угла решетки в ее правый верхний угол. Эти требования будут сформулированы в терминах последовательности П = П(W), состоящей из «1» и «-1» в соответствии со знаками цифр в исходной последовательности W:

1) алгебраическая сумма цифр последовательности П должна быть равна $m$ (откуда, в частности, следует, что длина последовательности П должна иметь ту же четность, что число $m$);

2) при суммировании слева направо никакая частичная алгебраическая сумма цифр последовательности П не может быть $< 0$ или $> m$.

Теперь все маршруты обыкновенного муравья нетрудно перенумеровать, предварительно разбив их на классы:

а) маршруты, для которых последовательность W имеет длину $m$;

б) маршруты, для которых последовательность W имеет длину $m+2$;

в) маршруты, для которых последовательность W имеет длину $m+4$;

и так далее.

Затем внутри каждого класса можно упорядочить числовые записи, обращаясь с «отрицательными цифрами» как с обычными цифрами и учитывая их естественный порядок на числовой оси. Например,

2(-3)123456 < 2(-1)123456.

**Замечание.** Итак, перенумеровать все маршруты обыкновенного муравья, направляющегося из левого нижнего угла решетки в правый верхний угол, не слишком сложно. Однако хотелось бы выделить среди этих маршрутов те, в которых ни одно ребро не проходится дважды.

Покажем, как это можно сделать, на примере горизонтальных ребер (см. рис. 11).

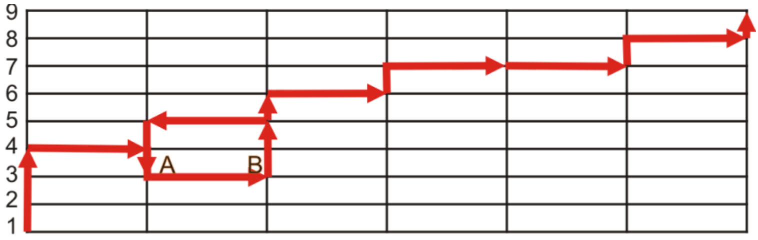


Рис. 11. Изображенный маршрут соответствует числовой записи $W = 43(-5)36778$;
последовательность П имеет вид $11(-1)11111$;
последовательность S частичных сумм для П имеет вид $S = 12123456$

Мы видим, что на втором и четвертом месте в последовательности W стоит цифра 3; при этом на втором и четвертом местах в последовательности S = S(П) частичных сумм стоит одно и то же число (а именно, число 2). Это и означает, что горизонтальное ребро AB пройдено муравьем дважды. Таким образом, способ отсева маршрутов, у которых горизонтальные ребра проходятся больше одного раза, найден. Для того, чтобы сделать такую проверку более наглядной, можно вместо последовательности W сопоставлять маршруту муравья последовательность пар чисел, где первая координата каждой пары взята из последовательности W, а вторая координата – из соответствующей последовательности S. Для маршрута, изображенного на рис. 11, такая последовательность будет иметь вид:

(4; 1), (3; 2), (-5; 1), (3; 2), (6; 3), (7; 4), (7; 5), (8; 6).

Итак, пара (3; 2) встречается в этой последовательности дважды; это и означает, что соответствующее горизонтальное ребро AB было пройдено дважды.

Что касается вертикальных ребер, пройденных более одного раза, то они отсеиваются точно так же, если поменять роли вертикальной и горизонтальной сторон решетки.

**Замечание.** Очевидно, что длина последовательности W для маршрута, в котором звенья решетки проходятся не более одного раза, не превосходит общего числа звеньев решетки, т.е. $m(k+1) + (m+1)k$.

**Замечание.** Итак, маршруты на прямоугольной решетке оказались своеобразным полигоном, на котором можно отрабатывать перечисление объектов при помощи комбинации двух методов: разбиения на классы (эквивалентного построению деревьев) и линейного числового перебора.

## § 11. Первое добавление. Односторонний муравей на треугольной и круговой решетках

Здесь мы снова вернемся к одностороннему муравью.

**Задача 11.1.** *В вершине А треугольной решетки находится односторонний муравей; ему нужно проложить маршрут из А в вершину В (см. рис. 12). Двигаться по наклонным отрезкам, исходящим из вершины А, муравей может только вниз (удаляясь от А), а по горизонтальным отрезкам – только слева направо. Сколько различных маршрутов может проложить муравей?*

**Решение.** На первый взгляд может показаться, что задача 11.1 потребует довольно громоздких вычислений (поскольку при разных маршрутах муравью потребуется пройти разное число звеньев решетки). Однако эта задача (как и задача 1.1) решается «в одно действие».

Действительно, проведем *дополнительный горизонтальный отрезок* CD над остальными горизонтальными отрезками, соединяющими боковые стороны треугольника.

Тогда каждому начинающемуся в вершине А маршруту нашего муравья может быть взаимно-однозначным образом сопоставлен его же маршрут, начинающийся в точке С (см. рис. 13). Теперь наша задача очевидным образом сводится к задаче 1.1. Ответ для случая, изображенного на рис. 12, дается числом сочетаний $C^5_9$.

В общем случае, если из вершины А треугольника исходит $k$ отрезков (включая боковые стороны треугольника), а горизонтальных отрезков, соединяющих боковые стороны, (включая в их число основание треугольника) всего m, ответом будет $C^{k-1}_{m+k-1}$.

**Пример.** Если в исходной треугольной решетке отсутствуют какие-либо внутренние звенья (т.е. $k = 2$; $m = 1$), то

$$C^{k-1}_{m+k-1} = C^{1}_{2} = 2,$$

что совпадает с геометрически очевидным результатом.

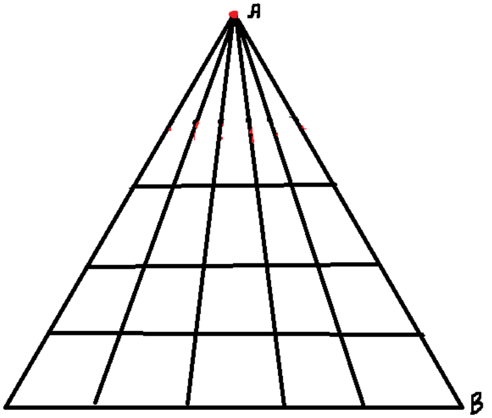


Рис. 12. Односторонний муравей на треугольной решетке

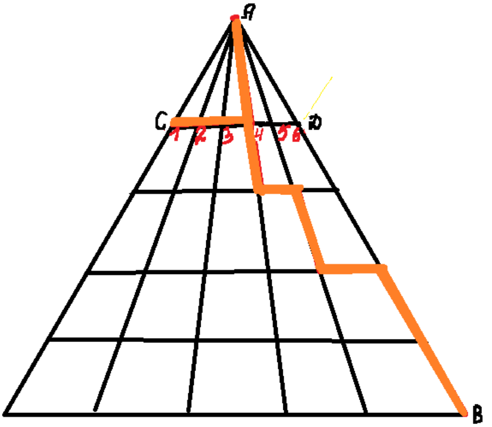


Рис. 13

**Задача 11.2.** *Муравей сидит в центре решетки, образованной $m$ концентрическими окружностями и $k$ исходящими из центра радиусами. Муравей может двигаться только в сторону «от центра» по радиусам или по окружностям по часовой стрелке (см. рис. 14).При этом дважды проходить один и тот же участок пути запрещено. Сколькими способами может муравей добраться до внешней окружности?*

***Ответ:*** $k(k+1)^{m-1}$.

**Задача 11.3.** *Пусть выполнены все условия задачи 11.2 и пусть, кроме того, муравью запрещено совершать более одного оборота вокруг центра решетки. Сколькими способами может муравей добраться до внешней окружности?*

**Решение.** Эта задача похожа на задачу 11.1 и также решается «в одно действие». Различие состоит в том, что здесь не нужно проводить дополнительных построений. Прежде всего, замечаем, что первый ход муравья может быть сделан одним из $k$ способов, после чего ситуация сводится к рассмотренной в § 1 задаче 1.1; теперь односторонний муравей фактически путешествует по прямоугольной решетке размером $(m-1)\times k$.

***Ответ:*** $kC^{k}_{m+k-1}$ способами.

**Замечание.** Очевидно, что число способов в задаче 11.3 должно быть меньше, чем аналогичное число способов в задаче 11.2, т.е. должно выполняться неравенство

$$kC^{k}_{m+k-1} < k(k+1)^{m-1}.$$

Сокращая здесь на $k$, и переобозначая $m$-1 через $m$, приходим к ранее установленному неравенству (см. § 9).

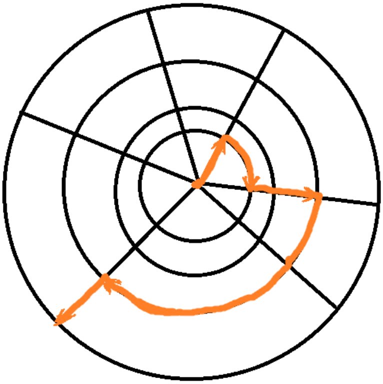

Рис. 14

**Задача 11.4.** *Муравей сидит в центре решетки, образованной m концентрическими окружностями и k исходящими из центра радиусами. Муравей может двигаться только в сторону «от центра» по радиусам или по окружностям (в обоих направлениях). При этом дважды проходить один и тот же участок пути запрещено. Сколькими способами может муравей добраться до внешней окружности?*

***Ответ:*** $k(2k+1)^{m-1}$*способами.*

Наконец, еще одна задача, несколько отличающаяся от предыдущих по своему содержанию.

**Задача 11.5.** *В стране Муравии всего 17 муравейников, расположенных по окружности, причем любые два муравейника соединены дорогой с односторонним движением (см. рис. 15). Путешествие по каждой такой дороге занимает у любого муравья ровно один час. Сможет ли Муравьиный министр транспорта так расставить указатели на дорогах, чтобы из любого муравейника можно было добраться до любого другого муравейника не более, чем за два часа?*

***Указание.*** Попробуйте решить задачу сначала для пяти муравейников, а затем – в случае, когда муравейников всего четыре.

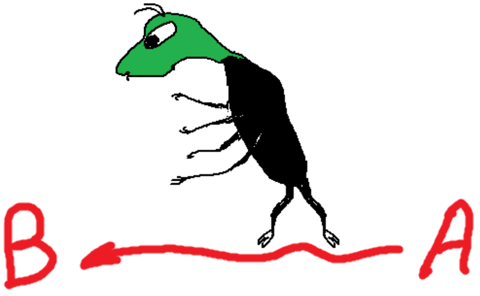


Рис. 15. Односторонняя дорога из **A** в **B**

## § 12. Второе добавление. Король на шахматной доске

Рассмотрим одну перечислительную задачу, которая для своего решения требует совершенно иного подхода, отличного от приемов, встречавшихся нам выше (подробности и более глубокий анализ см. в [7]).

На этот раз нам будет удобнее говорить о короле, передвигающемся по шахматной доске, а не о муравье, движущемся по звеньям решетки.

**Задача 12.1.** *Король стоит на левой нижней клетке прямоугольной шахматной доски размером $m \times k$. Он может перемещаться вверх или вправо на клетку, соседнюю по стороне с той клеткой, на которой он находится в данный момент. Кроме того, король может переходить на «соседнюю по вершине» клетку, расположенную правее и выше. Сколькими способами король может добраться до клетки в правом верхнем углу шахматной доски?*

**Решение.** Для простоты ограничимся случаем $m = k = 5$ (см. рис. 16).

Прежде всего, заметим, что в левый нижний угол доски короля можно поставить одним-единственным способом. Поэтому запишем число «1» в клетку A1. Далее, в каждую клетку левого столбца, а также в каждую клетку нижней строки король может тоже попасть одним-единственным способом (не путать с числом шагов, которые для этого придется сделать!). Поэтому во все вышеупомянутые клетки ставим единицу. Далее, в клетку B2 можно попасть из клеток A1, A2 и B1. Складывая числовые значения, записанные в этих клетках, получаем число способов, которыми король может попасть в клетку B2. Записываем это число («3») в клетку B2. Продвигаясь аналогичным образом по шахматной доске, получаем ответ на вопрос задачи: в правый верхний угол доски король может попасть 282 способами (282 = 116 + 116 + 50).

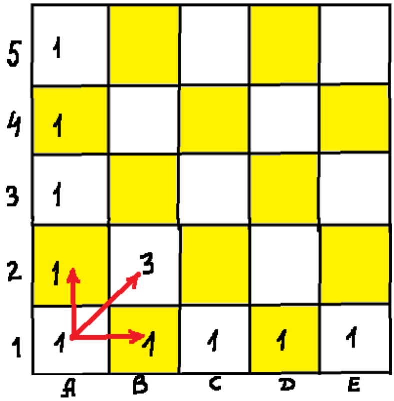


Рис. 16

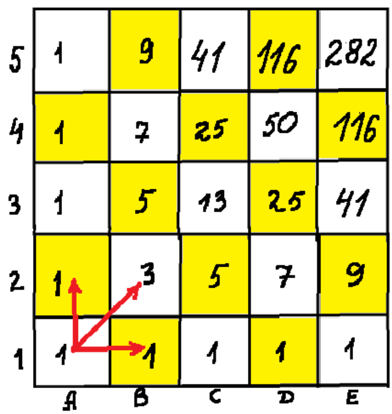


Рис. 17

**Задача 12.2.** *Король стоит на левой нижней клетке прямоугольной шахматной доски размером 5×5. Он может перемещаться вверх или вправо на клетку, соседнюю по стороне с той клеткой, на которой он находится в данный момент. Кроме того, король может переходить на «соседнюю по вершине» клетку, расположенную выше (правее или левее). Сколькими способами король может добраться до клетки в правом верхнем углу шахматной доски?*

**Замечание.** В [8] рассмотрена аналогичная задача в случае «неправильной» шахматной доски, клетки которой являются выпуклыми многоугольниками.

## § 13. Третье добавление. Замощение полоски

В заключение разберем еще один подход к решению перечислительных задач, связанный с установлением рекуррентных соотношений. В отличие от ситуации в предыдущем Добавлении, здесь мы будем иметь дело с продвижением вдоль прямой (а не по плоскости).

Следующая задача аналогична задачам из гл. 2 превосходной книги С.К. Ландо [7].

**Задача 13.1**. *Дана бумажная полоска размера 1×n. Требуется замостить ее, используя единичные квадраты, доминошки размером 1×2, «триминошки» размером 1×3, а также «тетраминошки» размером 1×4. Сколькими способами это можно сделать?*

**Решение.** Будем обозначать через $a_n$ число способов решения поставленной задачи. Имеем (см. рис. 18):

$a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 4$; $a_4 = 8$.

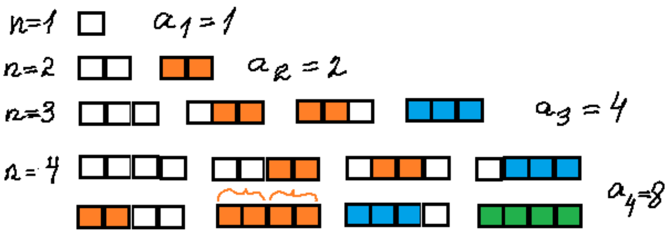


Рис. 18

В каждом из рассмотренных на рис. 18 случаев ($n$ = 1, 2, 3 и 4) замощения перечислены не в случайном порядке, а упорядочены «по старшинству» следующим образом. Отдельным единичным квадратам присвоено значение «1»; квадратам, входящим в состав доминошки, присвоено значение «2»; квадратам, входящим в состав триминошки, присвоено значение «3», а квадратам, образующим тетраминошку, присвоено значение «4» (см. рис. 19).

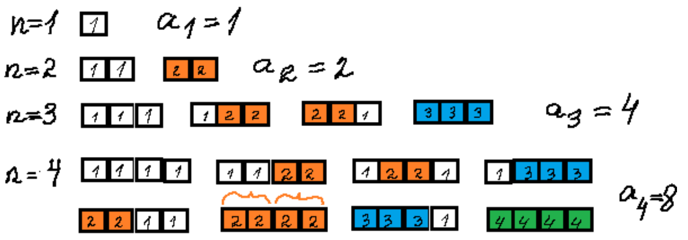


Рис. 19

В дальнейшем замощения, реализуемые для полоски длины $n$, будем называть $n$-замощениями.

Рассмотрим теперь случай $n = 5$. Будем устраивать 5-замощения, используя замощения, проведенные ранее при $n = 1, 2, 3$ и 4. Поступим следующим образом:

а) к каждому 4-замощению добавим справа единичный квадрат;

б) к каждому 3-замощению добавим справа доминошку;

в) к каждому 2-замощению добавим справа триминошку;

г) к 1-замощению добавим справа тетраминошку.

Прежде всего, покажем, что среди построенных замощений нет двух одинаковых. Действительно, достаточно заметить, что все новые замощения, полученные из прежних замощений, относящихся к разным $n$, будут оканчиваться на разные цифры.

Важно показать также, что ни одно 5-замощение не будет пропущено. Действительно, пусть имеется некоторое замощение X, реализуемое для случая $n = 5$. Пусть, например, замощение X оканчивается на одиночный квадрат. Убирая этот квадрат, очевидно, получим некоторое 4-замощение. Однако все 4-замощения были использованы при нашем построении набора 5-замощений. Тем самым мы показали, что рассматриваемое замощение X не могло быть пропущено.

Итак, общее количество 5-замощений равно:

$a_5 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$

Такие же рассуждения, проведенные для произвольного $n$ ($n \geq 5$), приводят к соотношению

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}. \qquad (*)$$

В частности, отсюда следует, что

$a_6 = 15 + 8 + 4 + 2 = 29;$

$a_7 = 29 + 15 + 8 + 4 = 56;$

$a_8 = 56 + 29 + 15 + 8 = 108$

….

(каждый раз при увеличении $n$ на единицу число замощений приблизительно удваивается).

**Замечание.** Нетрудно получить следующую довольно грубую оценку роста чисел $a_n$ *:*

$$9/5 < a_{n+1}/a_n \leq 2. \qquad (**)$$

Действительно, имеем из (*) при произвольно взятом $n$ ($n \geq 5$):

$$a_{n+1}/a_n = 1 + (a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3})/a_n =$$

$$= 1 + (a_n - a_{n-4})/\, a_n = + 2 - a_{n-4}/a_n\,, \qquad (***)$$

откуда следует правое неравенство в (**).

Для доказательства левого неравенства (**) воспользуемся методом математической индукции.

Прежде всего, заметим, что левое неравенство в (**) выполняется при $1 \leq n \leq 5$.

Далее, предположим, что при каждом натуральном $j$, не превосходящем некоторое произвольно взятое $k$ (где $k > 5$), верно неравенство

$9/5 < a_{j+1}/a_j.$

Покажем, что тогда будет справедливо и аналогичное неравенство при $j = k + 1$, т.е.

$9/5 < a_{k+2}/a_{k+1}.$

В силу (***), где $n$ нужно заменить на $k + 1$, последнее неравенство может быть переписано в следующем эквивалентном виде: $9/5 < 2 - a_{k-3}/a_{k+1}$, т.е. $a_{k+1}/a_{k-3} > 5$,

или, что то же самое,

$$\frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} > 5.$$

Однако в силу предположения индукции, каждый множитель в левой части последнего соотношения больше 9/5. Таким образом, нам осталось установить, что $(9/5)^4 > 5$. Справедливость этого неравенства проверяется непосредственным перемножением.

**Замечание.** Нетрудно понять, что аналогичные рекуррентные соотношения возникают, если разрешается использовать для $n$-замощения любые прямоугольники размером $1\times1$, $1\times2$, …, $1\times k$ (здесь $k < n$).

**Замечание.** Вернемся к постановке задачи 13.1, но будем теперь дополнительно считать, что:

а) каждая используемая при замощении полоски фигура должна быть покрашена в один из N цветов;

б) фигуры, расположенные при замощении рядом, не могут быть покрашены в один цвет.

Нетрудно видеть, что тогда приведенное выше рекуррентное соотношение (*) заменится на

$$a_{n+1} = (N - 1)(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}).$$

**Замечание.** Постановку задачи 13.1 можно видоизменить также следующим образом.

Будем считать, что каждый используемый при замощении полоски единичный квадрат должен быть покрашен в один из $N_1$ цветов, а каждая доминошка, триминошка и тетраминошка – соответственно в один из $N_2$, $N_3$ и $N_4$ цветов. (На этот раз не предполагаем, что соседние фигуры обязательно должны быть покрашены в разные цвета.) Тогда соответствующее рекуррентное соотношение, очевидно, примет вид

$$a_{n+1} = \mathrm{N}_1 a_n + \mathrm{N}_2 a_{n-1} + \mathrm{N}_3 a_{n-2} + \mathrm{N}_4 a_{n-3}.$$

Если какие-то элементы (например, доминошки) при замощении использовать запрещено, то соответствующий коэффициент в рекуррентном соотношении, как нетрудно видеть, будет равен нулю. Сделанное замечание без изменений переносится на случай, когда при $n$-замощении могут быть использованы любые прямоугольники размером $1\times1$, $1\times2$, …, $1\times k$ (здесь $k < n$) или только прямоугольники некоторых специальных размеров из упомянутого набора . Тем самым мы получили модель, реализующую всевозможные рекуррентные соотношения с целыми неотрицательными коэффициентами.

**Замечание.** Более глубокое рассмотрение подобных задач можно найти в [7].

## Литература


1. *Локшин А.А.* Мешки, множества и математика для детей. – М.: МАКС Пресс, 2015.

2. *Локшин А.А. Иванова Е.А., Бахтин М.М.* Диаграммы Эйлера в элементарной математике. – М.: МАКС Пресс, 2022.

3. *Семенов А.Л., Рудченко И.А.* Информатика. 3 класс. Ч. 1. – М., 2013.

4. *Локшин А.А., Иванова Е.А., Лаврова Н.Н.* О некоторых приемах решения комбинаторных задач / Начальная школа, 2021, № 9.

5. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.

6. *Левитас Г.Г.* Нестандартные задачи по математике в 3 классе. – М.: ИЛЕКСА, 2015. С. 41.

7. *Ландо С.К.* Введение в дискретную математику. – М.: МЦНМО, 2014.

8. *Локшин А.А.* Элементарное введение в теорию графов. – М.: МАКС Пресс, 2022.

**A.A. Lokshin, N.N. Lavrova, M.S. Malgina**

**One-side ant, trees and linear enumeration of objects**: manual. – 2nd ed. rev. and exp. – Moscow: MAKS Press, 2024. – 56 p.: ill.

ISBN 978-5-317-07145-5

https://doi.org/10.29003/m3803.978-5-317-07145-5

Various ways of enumerating unordered collections are considered. The main attention is paid to the connection of three combinatorial problems: on the shortest routes of an ant along a rectangular lattice, on the enumeration of multi-digit numbers in the case of non-decreasing digits (when reading from left to right) and on the enumeration of admissible colorings of sets on whose elements the “sameness” relation is defined.

In the second edition, noted inaccuracies were corrected and new material was added related to the listing of multi-digit numbers whose digits satisfy specified restrictions.

For students of pedagogical institutes and high school students interested in mathematics.

*Keywords*: shortest path on a lattice, listing multi-digit numbers with restrictions, coloring bags.

*Учебное издание*

ЛОКШИН Александр Александрович
ЛАВРОВА Наталья Николаевна
МАЛЬГИНА Мария Сергеевна

ОДНОСТОРОННИЙ МУРАВЕЙ, ДЕРЕВЬЯ
И ЛИНЕЙНЫЙ ПЕРЕБОР ОБЪЕКТОВ

*Учебное пособие*

*Второе издание, исправленное и дополненное*

*В издании использованы рисунки А.А. Локшина*

Подготовка оригинал-макета:
*Издательство «МАКС Пресс»*
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*
Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 04.03.2024 г.
Формат 84х108 1/32. Усл. печ. л. 2,94. Тираж 25 экз. Заказ 024.

Издательство ООО «МАКС Пресс».
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н